

INTRODUCTION AUX EDP: DIFFERENCES FINIES

I Introduction

En physique , en mécanique , de nombreux phénomènes sont décrits par l'évolution spatiale et temporelle de grandeurs caractéristiques obéissant à des lois générales écrites sous la forme d'EDP

Les solutions analytiques étant exceptionnelles, des solutions approchées sont obtenues par des méthodes numériques
Diff, vol , elt fini

Méthode spectrales

On transforme alors un problème continu, d'un domaine continu D en un problème approché sur un domaine de calcul M.

Ce domaine M définit des points représentatifs où la solution sera effectivement calculée.

Ces points définissent un maillage pour lequel la réécriture du problème s'appelle discrétisation.

En général :

Le problème est tout défini si on connaît :

- La loi d'évolution (eq. ou syst comp)
- Le comportement aux bornes du domaine (conditions ambiantes)
- les conditions initiales

Ainsi , la méthode des différences finies consiste à remplacer l'expression de l'EDP dans D par une approximation formellement équivalente sur M

II Classification de EDP

En pratique , les Equations aux Dérivées Partielles que l'on rencontre sont d'ordre peu élevée (2 en général). Une classification a été établie, inspirée de la classification des coniques. On rencontre 3 classes d'EDP

Hyperbolique

Coniques:

$$\varphi(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Equation équivalente :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$$

Ainsi l'équation des directions asymptotiques $N = y / x = \text{constante}$ est

$$Cm^2 + 2lm + a = 0$$

hyperbolique $\Rightarrow b^2 - 4ac > 0$

2 directions asymptotiques réelles et $\neq$

La conique est une hyperbole

$$\partial^2 p / \partial x^2 = \frac{1}{2} \partial^2 p / \partial t^2$$

où c célérité de l'onde, vibration corde vibrante

Parabolique

$$\partial f / \partial t = \alpha \Delta f \text{ eq}^\circ \text{ diffusion}$$

Courbe / $\Delta = 0$

Les deux directions asymptotiques réelles sont confondues

Conique est une parabole Elliptique

Equation d'élasticité (Laplace, poisson)

$$\partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 \neq \rho(x, y)$$

Conique / $\Delta < 0$

Les deux directions asymptotiques sont complexes, la conique n'a pas de branche infinie, la conique est une ellipse

III Classification des conditions aux limites

La résolution d'une EDP nécessite toujours la connaissance des conditions aux limites pour définir totalement le problème C contour de D ,Plusieurs types de conditions existent

III.1 Condition de 1ere espèce ou de DIRICHLET

$$\forall M(x, y) \in C$$

$$F(M) = U(x, y, t)$$

Etat homogène

La fonction f est donnée sur le contour

III.2 Condition de 2° espèce où NEUMANN

$$\forall M(x, y) \in C$$

$$\partial f / \partial n = u(x, y, t)$$

N = normale sortant de M

La dérivée de F est donnée le long de la normale ce qui revient à donner un flux

III . 3 Condition de 3° espèce ou mixte

$$\forall M(x,y) \in C$$

$$(k\partial f/\partial n) \cdot n + hf = \mu(x,y,t)$$

IV . Maillage

Cette étape consiste à construire le domaine M, donc à définir les points calcul ou sera résolu l'équation totale aux dérivées partielles

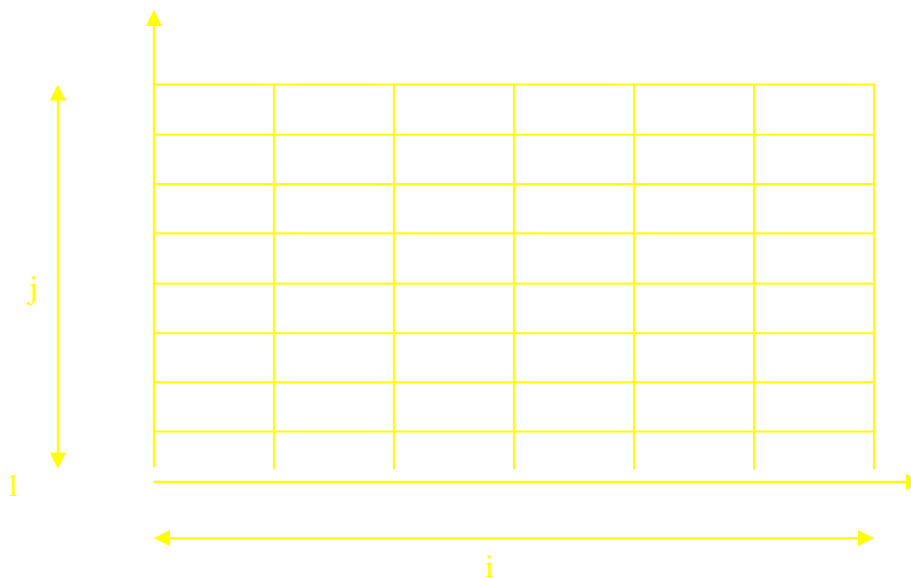
Placer nous dans les cas où D est un rectangle $[0,a] \times [0,b]$

On suppose vouloir connaître la solution en n_x points selon l'axe x et n_y selon y

L'intervalle entre 2 points est donc

$$\Delta x = a/n_x - 1$$

$$\Delta y = b/n_y - 1$$



Un point M sera donc référencé par deux indices i et j. La numérotation la plus simple est la meilleure (maillage structure le point i+1, j est donc à droite du point (i,j))

$$(x_i, y_j) = ((i-1) \Delta x, (j-1) \Delta y)$$

Si f est la fonction recherchée alors $f(x,y) = f(x_i, y_j)$ que l'on note aussi $f_{i,j}$.

V . Formule des différences finies

V.1 Approximation d'une dérivée 1^{ère}

$$(\partial f / \partial x)_{i,j} = (f_{i+1,j} - f_{i,j}) / \Delta x$$

Ou

$$(\partial f / \partial x)_{i,j} = (f_{i,j} - f_{i-1,j}) / \Delta x$$

Ou

$$(\partial f / \partial x)_{i,j} = (f_{i-1,j} - f_{i+1,j}) / 2\Delta x$$

V.2 Dérivées secondes

$$(\partial^2 f / \partial x^2)_{i,j} = 1/\Delta x^2 (f_{i-j,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j})$$

$$(\partial^2 f / \partial y^2)_{i,j} = 1/\Delta y^2 (f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1})$$

V.3 Dérivées croisées

$$\begin{aligned} \partial^2 f / \partial x \partial y &= \partial / \partial y (\partial f / \partial x)_{i,j} \\ &= 1/(4\Delta x \Delta y) (f_{(i+1,j+1)} - f_{(i+1,j-1)} - f_{(i-1,j+1)} + f_{(i-1,j-1)}) \end{aligned}$$